Sciences expérimentales **Mai 2011**

Bac blanc

Lycée : Ouadanine

Coefficient : 3

Exercice 1 :(4pts)

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse

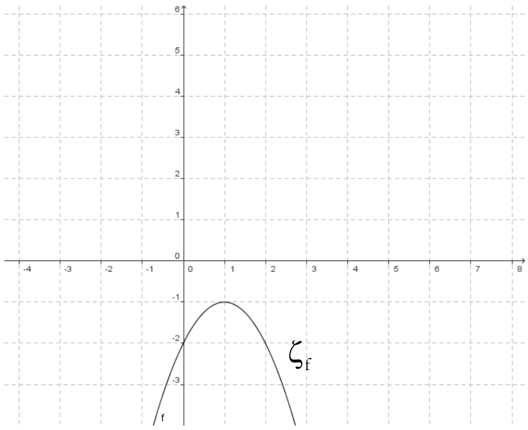
1/ Soit P un plan dont une équation cartésienne est : $2x-z+2=0$. Un vecteur normal de P est

a) $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec{V}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ c) $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

2/ Soit S une sphère d'équation cartésienne est : $x^2+y^2+z^2=1$ et P le plan d'équation : $x+1=0$

a) $S\cap P=\varnothing$ b) $S\cap P$ est un point c) $S\cap P$ est un cercle

3/



Ci-contre, la courbe d'une fonction définie sur □

Par une lecteur graphique on a $\int_0^2 f(x)\,dx$ est égale :

a) 0 b) $-\frac{8}{3}$ c) $\frac{8}{3}$

4/ Soit U la suite définie sur par $U_n=\ln(\frac{e.n+1}{n+1})$ on alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$

Exercice N°2 : (5pts)

On considère une fonction f définie sur ℝ .

A) La courbe (C) ci-dessous est celle de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

* La courbe (C) de f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$
* La tangente à la courbe (C) au point $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ est parallèle à $\left(O,\vec{i}\right)$.
* La droite $\left(O,\vec{i}\right)$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

En utilisant le graphe :

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Préciser le sens de variation de f.

3/ Déterminer f(1) et f '(1).

4/ Que représente le point A pour (C).

B) La courbe (C) est en fait celle de la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

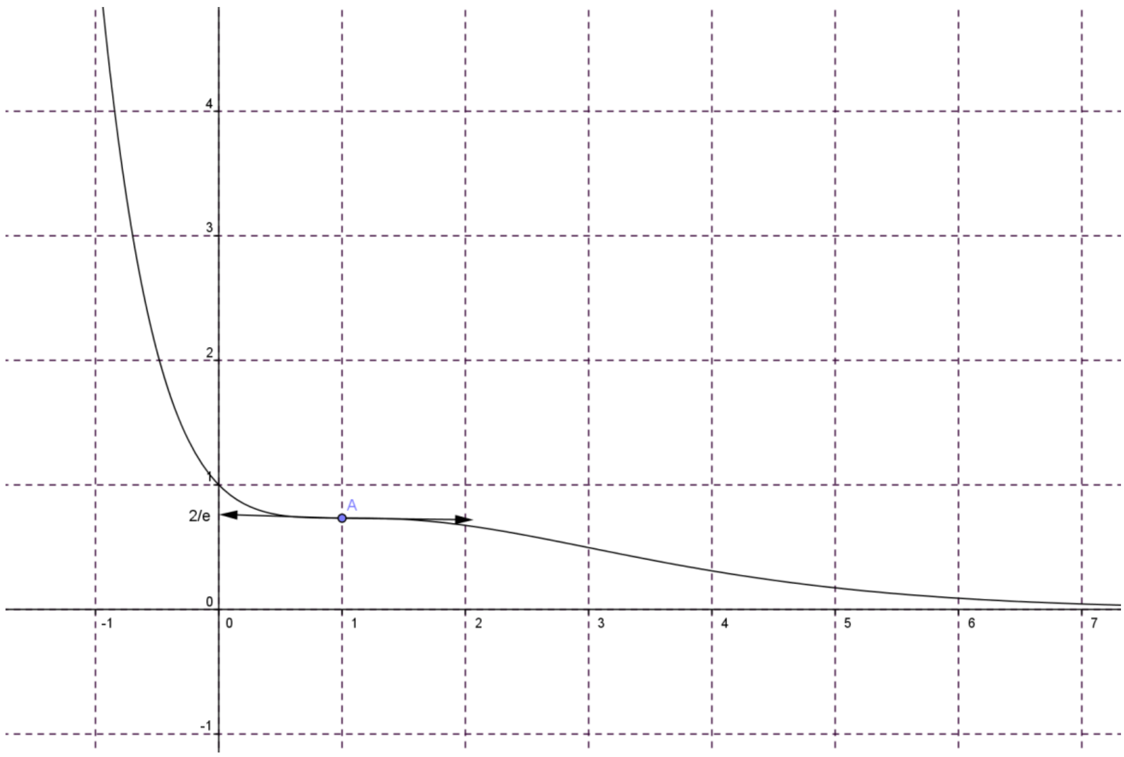
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respective x = 0 et x = n.

1/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I_n=\int_0^n xe^{-x}dx$.

2/ Vérifier que pour tout x de ℝ on a : $f'(x)+f(x)=2xe^{-x}$.

3/ a) En déduire que $A_n=2I_n-f(n)+1$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.



Exercice 3 : (5pts)

Partie I.

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle :]0 ; +∞[par : $g(x) = x - x\ln(x)$

1/ Montrer que g est dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et que : $g'(x) = -\ln(x)$

2/ Dresser le tableau de variation de la fonction g.

Partie II.

On donne les suites U et V définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{e^n}{n^n}$ et $V_n = \ln(u_n)$.

1/ a) Montrer que $v_n = n - n\ln(n)$.

b) En utilisant la partie (I) , déterminer le sens de variation de la suite (v_n)

c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2/ Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ puis déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 4 : (6pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,-1)$, $B(1,3,5)$, $C(-7,2,2)$ et $H(-1,4,3)$

1/a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HBC) est $x - 2y - 2z + 15 = 0$

c) Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC)

2/ On considère l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$

a) Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R
b) Vérifier que I est le milieu du segment [AH]
c) Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC)

3/ Soit $J(0,0,1)$

a) Vérifier que J appartient à S
b) Calculer la distance du point I à la droite (AJ)
c) En déduire que la droite (AJ) est tangent à S
d) Donner une représentation paramétrique de la droite (AJ) et déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AJ) et du plan (HBC)

Correction du Bac Blanc 2011 S.exp

Exercice 1 :(4pts)

c ; b ; b ; b

Exercice 4 : (6pts)

1)a / $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-6\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-5\\10\\10\end{pmatrix}$

b/ $\overrightarrow{HB}\wedge\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-5\\10\\10\end{pmatrix}$ est normal à (HBC) :$x-2y-2z+d=0$ Or $H(-1,4,3)\in(HBC)\Rightarrow d=15$

Donc (HBC) :$x-2y-2z+15=0$

c/ On a * $H(-1,4,3)\in(HBC)$

$$*\ \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}=-2\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow(AH)\perp(HBC)$$

⇒H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC)

2) S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4y-2z+1=0$

a/ M(x,y,z) $\in S\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4\Leftrightarrow S=S_{(I(0,2,1),R=2)}$

b/$\frac{x_A+x_H}{2}=0$; $\frac{y_A+y_H}{2}=2$; $\frac{z_A+z_H}{2}=1$ $\Leftrightarrow$ I est le milieu du segment [AH]

c/d(I,(HBC))=$\frac{AH}{2}=3>R=2$

$\Rightarrow S\cap(HBC)=\emptyset$

3/ Soit J(0,0,1)

a/ J appartient à S (vérifie l'équation)

b/ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ la distance du point I à la droite (AJ)est d(I,(AJ))=$\frac{\|\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}\|}{\|\overrightarrow{AJ}\|}=2$

c/d(I,(AJ))= R $\Leftrightarrow$ la droite (AJ) est tangent à S

d/M(x,y,z) ∈(AJ) $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\alpha+1\\y=0\\z=2\alpha-1\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

K(x,y,z) 'intersection de (AJ) et du plan (HBC) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\alpha+1\\y=0\\z=2\alpha-1\\x-2y-2z+15=0\end{cases}$ *

*$\Leftrightarrow\alpha=\frac{18}{5}\Leftrightarrow K(\frac{-13}{5},0,\frac{31}{5})$

Exercice 3 : (5pts)

Partie I.

1) Composée de produit et de somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, g est dérivable sur cet intervalle. On a $g'(x) = 1 - ((x)'\ln x + x(\ln x)') = 1 - (\ln x + x/x) = -\ln x$

2) $g'(x)$ est du signe contraire de $\ln(x)$ donc

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	‖	+	0	-	
g(x)	‖ 0	↗	1	↘	$-\infty$

* quand $x \to 0$, on sait que $x \ln x \to 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

* quand $x \to +\infty$, $g(x) = x(1 - \ln x)$: $\ln x \to +\infty$ donc $(1 - \ln x) \to -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

Partie II.

1) **a.** $v_n = \ln(u_n) = \ln(\frac{e^n}{n^n}) = \ln e^n - \ln(n^n) = n \ln e - n \ln(n) = n - n \ln(n)$

b. Ainsi, $v_n = n - \ln n = g(n)$ (avec $n>0$)

Comme sur $[1\,;+\infty[$, g décroît on a alors (v_n) décroissante sur $\mathbb{N}^*$

c. $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{(vn)}$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, (u_n) varie comme (v_n) donc (u_n) est ↘ sur $\mathbb{N}^*$

C.a.d ona $v_{n+1} \leq v_n$ donc $e^{(vn+1)} \leq e^{(vn)}$ et par suite $u_{n+1} \leq u_n$ car La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Or $u_n = e^{(vn)}$ et Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$

Exercice N°2 : (5pts)

A) En utilisant le graphe :

1/ $\lim_{+\infty} f = 0$; $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

2/ f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3/ $f(1)=\frac{2}{e}$ et $f'(1)=0$.

4/ le point A est un point d'inflexion pour (C).

B) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x = 0$ et $x = n$.

1/ $I_n = \int_0^n xe^{-x}dx .=[-xe^{-x}]_0^n - \int_0^n -e^{-x}dx = 1-(n+1)e^{-n}$

2/ pour tout x de on a $f'(x)= 2xe^{-x} - \underbrace{(1+x^2)e^{-x}}_{f(x)}$ $\Rightarrow f'(x)+f(x) = 2xe^{-x}$.

3/ a) $A_n = \int_0^n f(x)dx = \int_0^n (2xe^{-x} - f'(x))dx = 2I_n - [f(x)]_0^n$ $\Rightarrow A_n = 2I_n - f(n)+1$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n .=3$ (u .a) car $\lim_{+\infty} I_n = 1$ *et* $\lim_{+\infty} f(n) = 0$